カルツァ・クライン理論と初期の非可換ゲージ理論

中嶋 慧, 松尾 衛

October 20, 2020

Abstract

この記事は、『一般ゲージ理論と共変解析力学』の web 付録の 1 つである。第 1 章では、カルツァ・クライン理論を解説する。第 2 章では、クラインおよびパウリの非可換ゲージ理論を解説する。付録 A では、カルツァ・クライン理論のラグランジアン密度の計算を行う。

Contents

1　カルツァ・クライン理論

カルツァ(1921) とクライン (1926) による 5 次元の理論を解説する [1, 2]。この章では、ラテン文字の添え字は 0 から 4 を表し、ギリシャ文字の添え字は 0 から 3 を表すものとする。この理論では、通常の 4 次元時空を表す座標 x^μ の他に、もう 1 つの座標 x^4 が登場する。この 5 次元の多様体の計量を γ_{ij} とする。これは、x^4 には依らないとする。座標変換

$$x^\mu = \psi^\mu(x'^\nu), \tag{1.1}$$
$$x^4 = x'^4 + \psi^4(x'^\nu) \tag{1.2}$$

を考える。$\psi^i(x'^\nu)$ は、x'^4 には依らない。このとき、γ_{ij} の変換則は、

$$\gamma'_{ij} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^i}\frac{\partial x^b}{\partial x'^j}\gamma_{ab} \tag{1.3}$$

であり、

$$\gamma'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\gamma_{\alpha\beta} + \frac{\partial \psi^4}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\gamma_{4\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial \psi^4}{\partial x'^\nu}\gamma_{\alpha 4} + \frac{\partial \psi^4}{\partial x'^\mu}\frac{\partial \psi^4}{\partial x'^\nu}\gamma_{44}, \tag{1.4}$$
$$\gamma'_{4\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\gamma_{4\alpha} + \frac{\partial \psi^4}{\partial x'^\mu}\gamma_{44}, \tag{1.5}$$
$$\gamma'_{44} = \gamma_{44} \tag{1.6}$$

となる。γ_{44} は不変である。以下、$\alpha := \gamma_{44}$ は定数とする。また、

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}dx^\alpha, \tag{1.7}$$
$$dx'^4 = dx^4 - \frac{\partial \psi^4}{\partial x^\alpha}dx^\alpha \tag{1.8}$$

である。今、

$$\alpha\beta A_\mu := \gamma_{4\mu} = \gamma_{\mu 4}, \tag{1.9}$$
$$g_{\mu\nu} := \gamma_{\mu\nu} - \alpha\beta^2 A_\mu A_\nu \tag{1.10}$$

と置く。β は未定の定数である。この時、

$$d\theta := dx^4 + \beta A_\mu dx^\mu, \tag{1.11}$$
$$ds^2 := g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1.12}$$

は不変である。5 次元の計量は、

$$d\sigma^2 := \gamma_{ij}dx^i dx^j = ds^2 + \alpha d\theta^2 \tag{1.13}$$

となる。$g_{\mu\nu}$, A_μ の変換則は、

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}g_{\alpha\beta}, \tag{1.14}$$
$$A'_\mu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}A_\rho + \frac{1}{\beta}\frac{\partial \psi^4}{\partial x'^\mu} \tag{1.15}$$

である。特に、$x'^\mu = x^\mu$, $\psi^4 = -\beta\lambda(x^\mu)$ の場合は、

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\,, \quad A'_\mu = A_\mu - \frac{\partial\lambda}{\partial x^\mu} \tag{1.16}$$

となり、これはゲージ変換と同じ形をしている。また、$\psi^4 = 0$ の場合は、(1.14), (1.15) は、4 次元時空での一般座標変換[1]となる。そこで、カルツァは、A_μ を電磁場, $g_{\mu\nu}$ を重力のポテンシャルと同定した。

γ_{ab}, $g_{\mu\nu}$ に対する G(本文の第 9 章参照) を、それぞれ ${}^5G$ と G とすると、

$${}^5G = G - \frac{\alpha\beta^2}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{1.17}$$

となる[2]。ここで、$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ であり、ギリシャ文字の添え字の上げ下げは、$g_{\mu\nu}$ とその逆 $g^{\mu\nu}$ によって行った。導出の概要は、§ A.2 を参照。定数 α, β を、

$$\alpha\beta^2 = \frac{2\kappa}{\mu_0} \tag{1.18}$$

と選べば (このとき $\alpha > 0$ となる)、

$${}^5G = G - \frac{\kappa}{2\mu_0} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{1.19}$$

となる。

場の方程式を導く作用としては、

$$S_5 = \int d^5x\ \sqrt{-\gamma}\frac{1}{l}\Big(\frac{1}{2c\kappa}{}^5G + \mathcal{L}_{\mathrm{mat}}\Big) \tag{1.20}$$

を採用する。ここで、$\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}$ は重力場, 電磁場以外の「物質」場のラグランジアン密度で、x^4 には依存しないと仮定する。l は長さの次元の定数である。また、

$$\gamma := \det(\gamma_{ij}) = \alpha g\,, \quad g = \det(g_{\mu\nu}) \tag{1.21}$$

である。S_5 は、次の形に書く事が出来る：

$$S_5 \ = \ S\frac{\sqrt{\alpha}\int dx^4}{l}\ , \tag{1.22}$$

$$S \ := \int d^4x\ \sqrt{-g}\Big(\frac{1}{2c\kappa}{}^5G + \mathcal{L}_{\mathrm{mat}}\Big). \tag{1.23}$$

---

[1] 時空における一般的な座標変換の事を一般座標変換と呼ぶ。

[2] γ_{ab}, $g_{\mu\nu}$ から作られるリーマン接続でのスカラー曲率を、それぞれ ${}^5R$, R とすると、

$${}^5R \ = \ R - \frac{\alpha\beta^2}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

となる (R は本文の R^* に対応する)。また、$\mathcal{N}$(本文の 9.5 節を参照) の 5 次元での対応物を ${}^5\mathcal{N}$ とし、$g_{\mu\nu}$ の時空に対するものを $\mathcal{N}$ と書くと、

$${}^5\mathcal{N} \ = \ \mathcal{N} - \frac{\alpha\beta^2}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

となる。これは $\alpha = 1$ の場合に (A.32) で示される。

S についての最小作用の原理から場の方程式が得られる。S は、

$$S = \int d^4x \, \sqrt{-g} \Big(\frac{1}{2c\kappa} G - \frac{1}{4\mu_0 c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\mathrm{mat}} \Big) \tag{1.24}$$

となり、一般相対論の作用と一致する。

通常、x^4 はコンパクト化されていて、$L := \sqrt{\alpha} \int dx^4$ は有限と仮定される。このとき、$l = L$ とする。L は非常に短いために、通常は x^4 方向の次元の存在に気付かないと考える。

2　クラインおよびパウリの非可換ゲージ理論

この章の参考文献は [2] である。そこには、クラインの 1938 年の論文, パウリの A. Pais への手紙 (1953 年), ショウの 1955 年の論文, ヤン・ミルズの 1954 年の有名な論文 [3], 内山の論文 [4] と、それらの解説が載っている。

2.1　クライン (SU(2), 1938 年)

クラインは、中間子場と核子場の相互作用を考えた。その際、5 番目の次元 x^4 を考え、場は $e^{-iqx^4/\beta}$ の x^4 依存性を持つと仮定した。ここで、q は電荷である。β は未定の定数である。

この節では、ギリシャ文字の添え字は 0, 1, 2, 3 を表し、ラテン文字の添え字は 0, 1, 2, 3, 4 を表すものとする。クラインは、計量 γ_{ab} を次の形に仮定した：

$$\gamma_{44} = 1, \tag{2.1}$$

$$\gamma_{4\mu} = \gamma_{\mu 4} = \beta\chi_\mu, \tag{2.2}$$

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \beta^2\chi_\mu\chi_\nu. \tag{2.3}$$

逆行列は、

$$\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}, \tag{2.4}$$

$$\gamma^{4\mu} = \gamma^{\mu 4} = -\beta\chi^\mu, \tag{2.5}$$

$$\gamma^{44} = 1 + \beta^2\chi_\mu\chi^\mu \tag{2.6}$$

である。ここで、$g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆で、ギリシャ文字は $g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ で上げ下げした。通常のカルツァ・クライン理論では、χ_μ は電磁場と同定される。クラインの 1938 年の理論では、χ_μ は、核子のアイソスピン 2 重項

$$\psi := \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_p \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

(ψ_n, ψ_p はディラック場で、それぞれ中性子, 陽子を表す) に作用する 2 次行列

$$\chi_\mu = \begin{pmatrix} A_\mu & \tilde{B}_\mu \\ B_\mu & A_\mu \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

とされた。A_μ は x^4 に依らないが、$\tilde{B}_\mu$, B_μ は、

$$\beta\partial_4\tilde{B}_\mu = -ie\tilde{B}_\mu, \tag{2.9}$$

$$\beta\partial_4 B_\mu = ieB_\mu \tag{2.10}$$

に従うものと仮定する。e は電気素量である。A_μ は電磁場と同定され、$\tilde{B}_\mu$, B_μ は正および負の中間子と同定される。$\bar{\psi} := (\bar{\psi}_n, \bar{\psi}_p)$ とし、$\bar{\psi}_A (A = n, p)$ は $\psi_A := i\psi^\dagger\varepsilon^0$ によって定義される。$\varepsilon^0 = -\varepsilon_0$ は (2.17) で定義される。x^4 依存性は、

$$\beta\partial_4\psi = ie\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_p \end{pmatrix} = ie\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\psi, \tag{2.11}$$

$$\beta\partial_4\bar{\psi} = -ie(0, \bar{\psi}_p) \tag{2.12}$$

を仮定する。
ψ のラグランジアン密度の候補は、

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\bar{\psi}(\gamma^a\partial_a + m)\psi \\ &= -\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + \gamma^4\partial_4 + m)\psi \\ &= -\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + \gamma^4\frac{ie}{\beta}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + m)\psi \end{aligned} \tag{2.13}$$

である。ここで、γ^a は、

$$\frac{1}{2}(\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a) = \gamma^{ab} \tag{2.14}$$

で定義される。$\gamma_a := \gamma_{ab}\gamma^a$ とすると[3)]、

$$\frac{1}{2}(\gamma^a\gamma_b + \gamma_b\gamma^a) = \delta^a_b, \tag{2.15}$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a) = \gamma_{ab} \tag{2.16}$$

である。今、

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_a\varepsilon_b + \varepsilon_b\varepsilon_a) = \eta_{ab} \quad (\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1,1)) \tag{2.17}$$

で ε_a を定義し、$\gamma_4 = \varepsilon_4$ と置く。$\gamma_4 = \gamma_{4a}\gamma^a = \gamma^4 + \beta\chi_\mu\gamma^\mu$ なので、

$$\gamma^4 = \varepsilon_4 - \beta\gamma^\mu\chi_\mu \tag{2.18}$$

となる[4)]。この表式を (2.13) に代入し、ε_4 に比例する項を落として、

$$\mathcal{L}' \;=\; -\bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu + m)\psi, \tag{2.19}$$

$$D_\mu\psi := \left[\partial_\mu - ie\chi_\mu\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\psi \tag{2.20}$$

を得る。
上の $D_\mu\psi$ の表式は、SU(2) ゲージ理論の共変微分と少し異なる。今、

$$A^1_\mu := \frac{\tilde{B}_\mu + B_\mu}{\sqrt{2}}, \quad A^2_\mu := i\frac{\tilde{B}_\mu - B_\mu}{\sqrt{2}}, \quad A^3_\mu := A_\mu \tag{2.21}$$

と置くと、

$$\chi_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 A^1_\mu + \sigma_2 A^2_\mu) + A^3_\mu \tag{2.22}$$

---

3) ここで、γ_{ab} は計量である。$\gamma_{[a}\gamma_{b]}$ ではない。
4) χ_μ はアイソスピン 2 重項に作用する行列であり、γ^μ は ψ_n, ψ_p に作用する行列なので、χ_μ は γ^μ と可換である。

と書ける。ここで、

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

である。また、$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1-\sigma_3)/2$ なので、$D_\mu \psi$ は、

$$D_\mu \psi = \Big[\partial_\mu - ie\big\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 A_\mu^1 + \sigma_2 A_\mu^2) + A_\mu^3\big\}\frac{1-\sigma_3}{2}\Big]\psi \tag{2.24}$$

と書ける。これは、通常の共変微分

$$\big[\partial_\mu - \frac{ie}{2}\sum_{k=1}^{3} A_\mu^k \sigma_k\big]\psi \tag{2.25}$$

と異なる。

γ_{ab}, $g_{\mu\nu}$ に対する G を、それぞれ ${}^5G$ と G とする。$g_{\mu\nu}$ は x^4 に依らないとして、クラインは、

$${}^5G = G - \frac{\beta^2}{4}\chi_{\mu\nu}\chi^{\mu\nu} \tag{2.26}$$

を得た[5)]。ここで、

$$\chi_{\mu\nu} := \nabla_\mu \chi_\nu - \nabla_\nu \chi_\mu, \tag{2.29}$$

$$\nabla_\mu \chi_\nu := (\partial_\mu - \beta\chi_\mu\partial_4)\chi_\nu \tag{2.30}$$

である。これより、

$$\chi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A_{\mu\nu} & \tilde{B}_{\mu\nu} \\ B_{\mu\nu} & A_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie(B_\mu \tilde{B}_\nu - \tilde{B}_\mu B_\nu), \tag{2.32}$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + ie(A_\mu B_\nu - B_\mu A_\nu), \tag{2.33}$$

$$\tilde{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{B}_\nu - \partial_\nu \tilde{B}_\mu - ie(A_\mu \tilde{B}_\nu - \tilde{B}_\mu A_\nu) \tag{2.34}$$

を得る。

[5)] この式の導出は、通常のカルツァ・クライン理論の計算 (1.17) よりだいぶ面倒であり、著者らは導出できていない。導出の概要を§A.2 に示した。導出の過程で、χ_μ は行列でなく、数のように扱う必要があると思われる。付録 A において、$\mathcal{N}$ の 5 次元での対応物 ${}^5\mathcal{N}$ を計算した。$g_{\mu\nu}$ の時空に対するものを $\mathcal{N}$ と書くと、

$${}^5\mathcal{N} = \mathcal{N} - \frac{\beta^2}{4}\chi_{\mu\nu}\chi^{\mu\nu} + \beta\omega^\mu\partial_4\chi_\mu \tag{2.27}$$

となる。ω^μ はあるベクトルである。これは (A.32) で示される。χ_μ は行列なので、上式を、

$${}^5\mathcal{N} = \mathcal{N} - \frac{\beta^2}{4}\mathrm{Tr}(\chi_{\mu\nu}\chi^{\mu\nu}) + \beta\omega^\mu\mathrm{Tr}(\partial_4\chi_\mu) \tag{2.28}$$

と解釈すると、x^4 依存性に関する仮定により、上式の最後の項は 0 となる。

これらは、共変微分 (2.25) に対応する SU(2) ゲージ場の強さ

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + e\sum_{b,c=1}^{3} \varepsilon^a{}_{bc} A^b_\mu A^c_\nu \quad (a = 1, 2, 3) \tag{2.35}$$

と対応する。ここで、$\varepsilon^a{}_{bc} = \varepsilon_{abc}$ はレビ=チビタの記号である (完全反対称で、$\varepsilon_{123} = 1$)。$\chi_{\mu\nu}$ は $F^a_{\mu\nu}$ を用いて、

$$\chi_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 F^1_{\mu\nu} + \sigma_2 F^2_{\mu\nu}) + F^3_{\mu\nu} \tag{2.36}$$

と書ける。これは、通常の表式

$$\sum_{a=1}^{3} \sigma_a F^a_{\mu\nu} \tag{2.37}$$

とは異なる。

クラインは、(2.26) を、

$${}^5G = G - \frac{\beta^2}{4}\mathrm{Tr}(\chi_{\mu\nu}\chi^{\mu\nu}) \tag{2.38}$$

と解釈した。また、全系の作用として、

$$S = \int d^4x\ \sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{tot}}, \tag{2.39}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{tot}} = \mathcal{L}' + \frac{1}{2\kappa}{}^5G - \frac{\mu^2 c^2}{2\hbar^2} g^{\mu\nu} B_\mu \tilde{B}_\nu \tag{2.40}$$

を採用した。ただし、$\beta^2 = 2\kappa$ とした。μ は中間子の質量であり、κ はアインシュタイン定数である。g は $g_{\mu\nu}$ の行列式である。

2.2 パウリ (SO(3), 1953 年)

パウリから A. Pais への手紙 [2] を解説する。

4 次元時空を M とし、S^2 を 2 次元球面とする。パウリは、$\tilde{M} := M \times S^2$ という 6 次元空間を考えた。カルツァ・クライン理論は、$M \times S^1$ の理論なので、その自然な拡張である。

M の座標を x^μ, S^2 の座標を y^a($a = 1, 2, 3$ で $(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = r^2, r$ は定数) とし、$z^A = (x^\mu, y^a)$ とする。この節では、ギリシャ文字の添え字は 0, 1, 2, 3 を表し、ラテン小文字の添え字は 1, 2, 3 を表すものとする。$\tilde{M}$ の計量を $g_{AB}(z)$ とすると、その変換則は、

$$g'_{AB}(z') = \frac{\partial z^I}{\partial z'^A}\frac{\partial z^J}{\partial z'^B} g_{IJ} \tag{2.41}$$

である。特に、座標変換

$$(x^\mu, y^a) \to (x^\mu, y'^a), \quad y^a = R^a{}_b(x) y'^b \tag{2.42}$$

を考える。$R^a{}_b(x)$ は SO(3) の元である。この時、

$$g'_{ab} = R^c{}_a R^d{}_b g_{cd} = R^c{}_a R^d{}_b \delta_{cd} = \delta_{ab}, \tag{2.43}$$

$$g'_{a\mu} = R^b{}_a \Big(g_{b\mu} + \frac{\partial R^c{}_d}{\partial x^\mu} y'^d g_{bc} \Big) \tag{2.44}$$

である。$g_{bc} = \delta_{bc}$ である。今、

$$g_{a\mu} = A_{ab\mu}(x) y^b \tag{2.45}$$

を仮定する。$A_{ab\mu}(x)$ は y^c に依らない。このとき、

$$g'_{a\mu} = A'_{ab\mu} y'^b \tag{2.46}$$

である。一方、(2.44) より、

$$g'_{a\mu} = R^c{}_a \Big(A_{cd\mu} R^d{}_b + \frac{\partial R^d{}_b}{\partial x^\mu} \delta_{cd} \Big) y'^b \tag{2.47}$$

なので、

$$A'_{ab\mu} = R^c{}_a A_{cd\mu} R^d{}_b + R^c{}_a \delta_{cd} \frac{\partial R^d{}_b}{\partial x^\mu} \tag{2.48}$$

を得る。これは、

$$\begin{aligned} A'^a{}_{b\mu} &= R_c{}^a A^c{}_{d\mu} R^d{}_b + R_c{}^a \frac{\partial R^c{}_b}{\partial x^\mu} \\ &= (R^{-1})^a{}_c A^c{}_{d\mu} R^d{}_b + (R^{-1})^a{}_c \frac{\partial R^c{}_b}{\partial x^\mu} \end{aligned} \tag{2.49}$$

とも書ける。添え字の上げ下げは δ_{ab}, δ^{ab} で行った。(2.42), (2.44) を書き直すと、

$$y'^a = S^a{}_b(x) y^b, \tag{2.50}$$

$$\boldsymbol{A}'_\mu = \boldsymbol{S}\boldsymbol{A}_\mu \boldsymbol{S}^{-1} - \partial_\mu \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S}^{-1} \tag{2.51}$$

となる。ただし、$\boldsymbol{S} = (S^a{}_b)$ のような行列を用いた。$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R}^{-1}$ である。(2.51) は SO(3) のゲージ場の変換則である。つまり、$A^a{}_{b\mu}$ は SO(3) のゲージ場である[6)]。

パウリは、

$$F^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_{b\nu} - \partial_\nu A^a{}_{b\mu} + A^a{}_{c\mu} A^c{}_{b\nu} - A^a{}_{c\nu} A^c{}_{b\mu} \tag{2.52}$$

を場の強さとした。実際、これは SO(3) のゲージ場の強さである。

[6)] $g_{a\mu}$ を $A_{ab\mu}(x)y^b$ と展開した時の係数が SO(3) ゲージ場となる。カクツァ・クライン理論では、$g_{4\mu}$ が電磁場 (U(1) ゲージ場) なのであった。

A　カルツァ・クライン理論のラグランジアン密度

A.1　ラグランジアン形式：微分形式による計算

§2.1 のクラインの「ゲージ理論」におけるラグランジアン密度を計算する。記号は§2.1 と同じである。ただし、$\beta\chi_\mu$ を A_μ と書き、行列ではなく数として扱う。A_μ だけは、5 番目の座標 x^4 に依存するのであった。この x^4 依存性がなければ、以下の計算は、通常のカルツァ・クライン理論§1 に対するものとなる。

5 次元時空の計量は、

$$\gamma_{ab}dx^a dx^b = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + (dx^4 + A_\mu dx^\mu)^2 \tag{A.1}$$

である。フレーム 1 形式を、

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \ = \ \mathring{g}_{AB}\theta^A\theta^B, \tag{A.2}$$

$$\theta^4 := dx^4 + A_\mu dx^\mu \tag{A.3}$$

で導入する。$\mathring{g}_{AB}$ はミンコフスキー計量である。この章では、添え字 A, B, C, D は 0 から 3 を表す。このとき、

$$\gamma_{ab}dx^a dx^b = \mathring{g}_{AB}\theta^A\theta^B + \theta^4\theta^4 =: \mathring{g}_{\mathcal{AB}}\theta^{\mathcal{A}}\theta^{\mathcal{B}} \tag{A.4}$$

となる。この章では、添え字 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ は 0 から 4 を表す。A, B の上げ下げは $\mathring{g}_{AB}$ とその逆で、$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の上げ下げは $\mathring{g}_{\mathcal{AB}}$ とその逆で行う。

$\theta^{\mathcal{A}}, \theta^A$ に対するレビ=チビタ接続を、それぞれ $\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}}, \omega^A{}_B$ とする。このとき、

$$d\theta^{\mathcal{A}} \ = \ -\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}} \wedge \theta^{\mathcal{B}}, \tag{A.5}$$

$$d\theta^A \ = \ -\omega^A{}_B \wedge \theta^B \tag{A.6}$$

が成り立つ (捩率は 0 と仮定している)。また、

$$\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}} = \tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{BC}}\theta^{\mathcal{C}}, \quad \omega^A{}_B = \omega^A{}_{BC}\theta^C \tag{A.7}$$

と置く。この時、

$$-\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}} \wedge \theta^{\mathcal{B}} \ = \ -\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{BC}\theta^C \wedge \theta^B - (\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{4B} - \tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{B4})\theta^B \wedge \theta^4 - \tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{44}\theta^4 \wedge \theta^4 \tag{A.8}$$

である。最後の項は 0 である。(A.6) より、

$$\tilde{\omega}^A{}_{[BC]} = \omega^A{}_{[BC]}, \tag{A.9}$$

$$\tilde{\omega}^A{}_{B4} = \tilde{\omega}^A{}_{4B}\big(= -\tilde{\omega}_4{}^A{}_B\big) \tag{A.10}$$

を得る。また、$\omega^A{}_{B\mu}$ と $\theta^A_{\ a}$ が x^4 に依らないことから、

$$\tilde{\omega}^A{}_{BC} = \omega^A{}_{BC} \tag{A.11}$$

を得る。

ここで、

$$c_\mu := \partial_4 A_\mu\,,\quad f_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{A.12}$$

とし、

$$A := A_\mu dx^\mu =: A_A \theta^A, \tag{A.13}$$
$$c := c_\mu dx^\mu =: c_A \theta^A, \tag{A.14}$$
$$f_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \;\equiv\; f_{AB}\theta^A \wedge \theta^B \tag{A.15}$$

と置く。このとき、

$$\begin{aligned}
d\theta^4 \;&=\; \partial_{[\mu}A_{\nu]}dx^\mu \wedge dx^\nu + \partial_4 A_\mu dx^4 \wedge dx^\mu \\
&=\; \frac{1}{2}f_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu + c_\mu dx^4 \wedge dx^\mu \\
&=\; \frac{1}{2}f_{AB}\theta^A \wedge \theta^B + c_B dx^4 \wedge \theta^B \\
&=\; \frac{1}{2}f_{AB}\theta^A \wedge \theta^B + c_B(\theta^4 - A_A\theta^A) \wedge \theta^B \\
&=\; (\frac{1}{2}f_{AB} - A_{[A}c_{B]})\theta^A \wedge \theta^B + c_B\theta^4 \wedge \theta^B \\
&\equiv\; \frac{1}{2}F_{AB}\theta^A \wedge \theta^B + c_B\theta^4 \wedge \theta^B,
\end{aligned} \tag{A.16}$$
$$F_{AB} \;:=\; f_{AB} - A_A c_B + A_B c_A \tag{A.17}$$

である。これより、

$$\tilde{\omega}^4{}_B = -\frac{1}{2}F_{AB}\theta^A - c_B\theta^4, \tag{A.18}$$
$$\tilde{\omega}^4{}_{BA} = -\frac{1}{2}F_{AB} \tag{A.19}$$

となる。$\tilde{\omega}_{\mathcal{AB}} = -\tilde{\omega}_{\mathcal{BA}}$ より、$\tilde{\omega}^4{}_{4B} = 0$ である事を用いた。(A.10) より、

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}^A{}_{B4} &= -\tilde{\omega}_4{}^A{}_B \\
&= -\frac{1}{2}F^A{}_B
\end{aligned} \tag{A.20}$$

となり、

$$\tilde{\omega}^A{}_B = \omega^A{}_B - \frac{1}{2}F^A{}_B\theta^4 \tag{A.21}$$

となる。

また、$\tilde{\omega}_{\mathcal{AB}} = -\tilde{\omega}_{\mathcal{BA}}$ なので、

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}^B{}_4 &= -\tilde{\omega}_4{}^B \\
&= \frac{1}{2}F_A{}^B\theta^A + c^B\theta^4
\end{aligned} \tag{A.22}$$

となる。

今、

$$\tilde{s}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}} := \tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{C}} \wedge \tilde{\omega}^{\mathcal{C}}{}_{\mathcal{B}} \tag{A.23}$$

と置くと、

$$\tilde{s}^{A}{}_{B} = \tilde{\omega}^{A}{}_{C} \wedge \tilde{\omega}^{C}{}_{B} + \tilde{\omega}^{A}{}_{4} \wedge \tilde{\omega}^{4}{}_{B}, \tag{A.24}$$

$$\tilde{s}^{4}{}_{B} = \tilde{\omega}^{4}{}_{C} \wedge \tilde{\omega}^{C}{}_{B} \tag{A.25}$$

である。また、

$$\begin{aligned} -\tilde{N} &:= \tilde{s}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}} \wedge \eta_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}} \\ &= \tilde{s}^{A}{}_{B} \wedge \eta_{A}{}^{B} + 2\tilde{s}^{4}{}_{B} \wedge \eta_{4}{}^{B} \end{aligned} \tag{A.26}$$

とおく。ここで、

$$\eta^{\mathcal{AB}} := \tilde{*}(\theta^{\mathcal{A}} \wedge \theta^{\mathcal{B}}) \tag{A.27}$$

であり、$\tilde{*}$ は 5 次元時空でのホッジ作用素である。重力場および A_μ 場のラグランジアン形式は、$\tilde{N}$ の定数倍である。

さて、

$$\begin{aligned} \tilde{s}^{A}{}_{B} &= \Big[\omega^{A}{}_{C} - \frac{1}{2}F^{A}{}_{C}\theta^4\Big] \wedge \Big[\omega^{C}{}_{B} - \frac{1}{2}F^{C}{}_{B}\theta^4\Big] + \Big[\frac{1}{2}F_{C}{}^{A}\theta^{C} + c^{A}\theta^4\Big] \wedge \Big[-\frac{1}{2}F_{DB}\theta^{D} - c_{B}\theta^4\Big] \\ &\approx \omega^{A}{}_{C} \wedge \omega^{C}{}_{B} - \frac{1}{4}F_{C}{}^{A}F_{DB}\theta^{C} \wedge \theta^{D} \end{aligned} \tag{A.28}$$

である。ここで $\approx$ は、$\tilde{s}^{A}{}_{B} \wedge e_{A}{}^{B}$ の計算で落ちる項を落とした、という意味である。ただし、

$$\theta^{\mathcal{A}} \wedge \theta^{\mathcal{B}} \wedge \eta_{\mathcal{CD}} = (\delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}\delta^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}} - \delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}}\delta^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}})\eta, \quad \eta := \tilde{*}1 \tag{A.29}$$

を用いた。また、

$$\begin{aligned} \tilde{s}^{4}{}_{B} &= \Big[-\frac{1}{2}F_{AC}\theta^{A} - c_{C}\theta^4\Big] \wedge \Big[\omega^{C}{}_{B} - \frac{1}{2}F^{C}{}_{B}\theta^4\Big] \\ &\approx -\frac{1}{4}F_{AC}F^{C}{}_{B}\theta^4 \wedge \theta^{A} - c_{C}\theta^4 \wedge \omega^{C}{}_{B} \end{aligned} \tag{A.30}$$

となる。$\approx$ は、$\tilde{s}^{4}{}_{B} \wedge e_{4}{}^{B}$ の計算で落ちる項を落とした、という意味である。

上の計算より、

$$\begin{aligned} -\tilde{N} &= -N + \Big[\frac{1}{4}F_{BA}F^{AB} - 2\cdot\frac{1}{4}F_{AC}F^{CA} - 2c_{A}\omega^{AB}{}_{B}\Big]\eta \\ &= -N + \Big[\frac{1}{4}F_{AB}F^{AB} - 2c_{A}\omega^{AB}{}_{B}\Big]\eta \end{aligned} \tag{A.31}$$

である。ここで N は、$g_{\mu\nu}$ の時空に対する $\mathcal{N}$ を用いて、$N = \mathcal{N}\eta$ と書ける。$\tilde{N} = {}^5\mathcal{N}\eta$ と書くと、

$${}^5\mathcal{N} = \mathcal{N} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2c_{A}\omega^{AB}{}_{B}, \tag{A.32}$$

$$F_{\mu\nu} := \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \tag{A.33}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu A_\nu &:= \partial_\mu A_\nu - A_\mu c_\nu \\ &= (\partial_\mu - A_\mu\partial_4)A_\nu \end{aligned} \tag{A.34}$$

となる。(A.32) は (2.26) に対応するものである。$F_{\mu\nu}$ は§ 2.1 の $\beta\chi_{\mu\nu}$ である。

A.2 ^5G の計算：テンソルの成分による計算

§2.1 の計量を少し一般化し、

$$\gamma_{44} = \alpha, \quad \gamma_{4\mu} = A_\mu, \quad \gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{1}{\alpha} A_\mu A_\nu \tag{A.35}$$

とする。α は未定の定数である。逆行列は、

$$\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{4\mu} = -\frac{1}{\alpha} A^\mu, \quad \gamma^{44} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} A_\mu A^\mu \tag{A.36}$$

となる。$g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆であり、ギリシャ文字の上げ下げは $g^{\mu\nu}, g_{\mu\nu}$ で行う。${}^5\Gamma^c{}_{ab}$ を γ_{ab} に対するクリストッフェル記号とし、$\Gamma^\gamma{}_{\mu\nu}$ を $g_{\alpha\beta}$ に対するそれとする[7)]。多少の計算の後、以下を得る：

$$\begin{aligned}
{}^5\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} &= \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha}(f_\mu{}^\sigma A_\nu + f_\nu{}^\sigma A_\mu) + \frac{1}{2\alpha^2} A^\sigma (c_\mu A_\nu + A_\mu c_\nu), && \text{(A.37)}\\
{}^5\Gamma^4{}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{\alpha} A_\lambda {}^5\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha} S_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha^2}(c_\mu A_\nu + A_\mu c_\nu), && \text{(A.38)}\\
{}^5\Gamma^\sigma{}_{4\nu} &= \frac{1}{2} f_\nu{}^\sigma + \frac{1}{2\alpha}(c^\sigma A_\nu + A^\sigma c_\nu), && \text{(A.39)}\\
{}^5\Gamma^4{}_{4\nu} &= -\frac{1}{2\alpha} f_{\nu\lambda} A^\lambda - A^\lambda \frac{1}{2\alpha^2}(c_\lambda A_\nu + A_\lambda c_\nu), && \text{(A.40)}\\
{}^5\Gamma^\sigma{}_{44} &= c^\sigma, && \text{(A.41)}\\
{}^5\Gamma^4{}_{44} &= 0. && \text{(A.42)}
\end{aligned}$$

ここで、

$$S_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu \tag{A.43}$$

である。また、

$$\begin{aligned}
{}^5\Gamma_\mu &:= {}^5\Gamma^a{}_{\mu a} = \Gamma_\mu := \Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}, && \text{(A.44)}\\
{}^5\Gamma_4 &:= {}^5\Gamma^a{}_{4a} = \frac{1}{\alpha} c^\sigma A_\sigma && \text{(A.45)}
\end{aligned}$$

となる。

$\gamma_{ab}, g_{\mu\nu}$ に対する G を、それぞれ ${}^5G$ と G とする。${}^5G$ は、

$$\begin{aligned}
{}^5G &= {}^5\Gamma^d{}_{cb} {}^5\Gamma^c{}_{ad} \gamma^{ab} - {}^5\Gamma_c {}^5\Gamma^c{}_{ab} \gamma^{ab}\\
&\equiv {}^5G_1 - {}^5G_2 && \text{(A.46)}
\end{aligned}$$

となる。${}^5G_1$ は、

$$\begin{aligned}
{}^5G_1 &= r_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} + 2 r_{4\beta} \gamma^{4\beta} + r_{44} \gamma^{44}, && \text{(A.47)}\\
r_{\alpha\beta} &= {}^5\Gamma^\delta{}_{\gamma\beta} {}^5\Gamma^\gamma{}_{\alpha\delta} + 2 \cdot {}^5\Gamma^\delta{}_{4(\beta} {}^5\Gamma^4{}_{\alpha)\delta} + {}^5\Gamma^4{}_{4\beta} {}^5\Gamma^4{}_{\alpha 4}, && \text{(A.48)}\\
r_{4\beta} &= {}^5\Gamma^\delta{}_{\gamma\beta} {}^5\Gamma^\gamma{}_{4\delta} + {}^5\Gamma^\delta{}_{4\beta} {}^5\Gamma^4{}_{4\delta} + {}^5\Gamma^4{}_{\gamma\beta} {}^5\Gamma^\gamma{}_{44}, && \text{(A.49)}\\
r_{44} &= {}^5\Gamma^\delta{}_{\gamma 4} {}^5\Gamma^\gamma{}_{4\delta} + 2 \cdot {}^5\Gamma^\delta{}_{44} {}^5\Gamma^4{}_{4\delta} && \text{(A.50)}
\end{aligned}$$

[7)] $\Gamma^\gamma{}_{\mu\nu}$ は本文の $\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ である。

であり、${}^5G_2$ は、

$$
\begin{aligned}
{}^5G_2 &= s_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + 2s_{4\beta}\gamma^{4\beta} + s_{44}\gamma^{44}, && \text{(A.51)} \\
s_{\alpha\beta} &= \Gamma_\gamma {}^5\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} + {}^5\Gamma_4 {}^5\Gamma^4{}_{\alpha\beta}, && \text{(A.52)} \\
s_{4\beta} &= \Gamma_\gamma {}^5\Gamma^\gamma{}_{4\beta} + {}^5\Gamma_4 {}^5\Gamma^4{}_{4\beta}, && \text{(A.53)} \\
s_{44} &= \Gamma_\gamma {}^5\Gamma^\gamma{}_{44} && \text{(A.54)}
\end{aligned}
$$

となる。

通常のカルツァ・クライン理論 (§ 1) では、$c_\mu = 0$ である。(1.17) の導出はこの場合に行えば良い。この場合でも ${}^5G$ の計算はやや面倒であるが、$c_\mu \neq 0$ の場合に比べてずっと楽である。${}^5\Gamma^c{}_{ab}$ には、$F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} - A_\mu c_\nu + A_\nu c_\mu$ の組み合わせは現れない。${}^5G$ を計算し、$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ の項を出すのは非常に大変である。これに対して、前節での微分形式での計算では、$F_{\mu\nu}$ は (A.16) に自然に現れた。${}^5G$ の計算より、${}^5\mathcal{N}$ の計算の方が 100 倍ぐらい楽であり、比べ物にならないぐらい見通しが良い。

References

[1] 内山龍雄『一般ゲージ場論序説』(岩波書店, 1987 年).

[2] Lochlainn O'Raifeartaigh, "The Dawning of Gauge Theory", Princeton University Press (1997).

[3] C. N. Yang and R. L. Mills, "Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance", Phys. Rev. **96**, 191 (1954).

[4] R. Utiyama, "Invariant Theoretical Interpretation of Interaction", Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).