アインシュタイン作用の変分

中嶋 慧, 松尾 衛

October 6, 2020

Abstract

この記事は、『一般ゲージ理論と共変解析力学』の web 付録の 1 つである。アインシュタイン・ヒルベルトのラグランジアン密度は、

$$\sqrt{-g}\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}R = \frac{1}{2\kappa}(\boldsymbol{G} + \partial_\mu \boldsymbol{D}^\mu)$$

と書ける。$\boldsymbol{G}$ は $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ の 2 次式である。この記事では、

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\Big[\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})}\Big] = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

を示す。また、$\boldsymbol{G}$ において、

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} \to \nabla^{(0)}_\lambda g_{\mu\nu}$$

の置き換えをする。ここで、$\nabla^{(0)}_\lambda$ は共変微分で、その接続は平坦時空を表す計量に対するリーマン接続である。この置き換えで $\boldsymbol{G}$ は $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ になるが、この場合も、

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\Big[\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{G}}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{G}}}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})}\Big] = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

となることを示す。

Contents

1 目標 **2**

2 方針 **2**

3 A の変分 **3**

4 B の変分 **4**

5 $G_{\mu\nu}$ の計算 **5**

6 スカラーなラグランジアン密度 **7**

1　目標

この記事では D 次元時空を考え、計量 $g_{\mu\nu}$ の符号は $(-++\cdots+)$ とする。また、

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} := \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \tag{1.1}$$

$$R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta} := \partial_\alpha \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\alpha}, \tag{1.2}$$

$$R_{\mu\nu} := R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}, \tag{1.3}$$

$$R := g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{1.4}$$

とする[1)]。本文の第 9 章より、

$$\sqrt{-g}R \;=\; \boldsymbol{G} + \partial_\mu \boldsymbol{D}^\mu, \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{G} := \sqrt{-g}G\,, \quad G := A - B, \tag{1.6}$$

$$A := g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho}, \tag{1.7}$$

$$B := g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}, \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{D}^\rho := \sqrt{-g}\Big[g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\nu}\Big] \tag{1.9}$$

となる。ここで $g := \det(g_{\mu\nu})$ である。今、

$$G_{\mu\nu} := \frac{1}{\sqrt{-g}}\Big[\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})}\Big] \tag{1.10}$$

とする[2)]。以下では、

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{1.11}$$

を示したい。

2　方針

$\boldsymbol{G}$ の変分は、

$$\delta\boldsymbol{G} = (\delta\sqrt{-g})G + \sqrt{-g}\delta G \tag{2.1}$$

である。ここで、

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

なので、

$$\delta\boldsymbol{G} = \sqrt{-g}\Big[\delta g^{\mu\nu}(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}G) + \delta G\Big] \tag{2.3}$$

[1)] $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ は本文の $\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ であり、$R_{\mu\nu}$, R は本文の $R^*_{\mu\nu}$, R^* である。

[2)] $G_{\mu\nu}$ は本文の $G^*_{\mu\nu}$ である。

である。今、A, B の変分を、

$$\delta A = \delta g^{\mu\nu} A_{\mu\nu} + \delta(\partial_\lambda g^{\mu\nu}) A^\lambda{}_{\mu\nu}, \tag{2.4}$$
$$\delta B = \delta g^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + \delta(\partial_\lambda g^{\mu\nu}) B^\lambda{}_{\mu\nu} \tag{2.5}$$

とすると、

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial g^{\mu\nu}} = A_{\mu\nu} - B_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G \tag{2.6}$$

である。また、

$$G^\lambda{}_{\mu\nu} := -A^\lambda{}_{\mu\nu} + B^\lambda{}_{\mu\nu} \tag{2.7}$$

とする。このとき、

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} = \Gamma^\alpha{}_{\lambda\alpha} G^\lambda{}_{\mu\nu} + \partial_\lambda G^\lambda{}_{\mu\nu} \tag{2.8}$$

となる。ただし、

$$\partial_\lambda \sqrt{-g} = \sqrt{-g}\, \Gamma^\alpha{}_{\lambda\alpha} \tag{2.9}$$

を用いた。よって、

$$G_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - B_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\alpha} G^\lambda{}_{\mu\nu} + \partial_\lambda G^\lambda{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G \tag{2.10}$$

となる。

3 A の変分

本節および§ 4 の計算は [1] を参考にした。
A の変分を求める。まず、

$$\delta A = \delta g^{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} \Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} + g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} \Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} + g^{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} \delta\Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} \tag{3.1}$$

であり、

$$g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} \Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} = \delta(g^{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu}) \Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} - \delta g^{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} \Gamma^\gamma{}_{\mu\rho}, \tag{3.2}$$
$$g^{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} \delta\Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} = \delta(g^{\mu\nu} \Gamma^\gamma{}_{\mu\rho}) \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} - \delta g^{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} \Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} \tag{3.3}$$

なので、

$$\begin{aligned} \delta A &= -\delta g^{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} \Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} + \delta(g^{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu}) \Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} + \delta(g^{\mu\nu} \Gamma^\gamma{}_{\mu\rho}) \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} \\ &= -\delta g^{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} \Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} + \delta(g^{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} + g^{\rho\nu} \Gamma^\mu{}_{\gamma\nu}) \Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} \end{aligned} \tag{3.4}$$

である。ところで、

$$\nabla_\lambda g^{\alpha\beta} = \partial_\lambda g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\gamma} \Gamma^\beta{}_{\gamma\lambda} + g^{\beta\gamma} \Gamma^\alpha{}_{\gamma\lambda} = 0 \tag{3.5}$$

より、

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu} + g^{\rho\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\nu} = -\partial_{\gamma} g^{\mu\rho} \tag{3.6}$$

なので、

$$\delta A = -\delta g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} - \delta(\partial_{\lambda} g^{\mu\nu})\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \tag{3.7}$$

となり、

$$A_{\mu\nu} = -\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho}, \tag{3.8}$$

$$A^{\lambda}{}_{\mu\nu} = -\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \tag{3.9}$$

を得る。

4　B の変分

B の変分を求める。今、

$$\Gamma_{\gamma} := \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}, \tag{4.1}$$

$$c^{\delta} := g^{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}{}_{\alpha\beta} \tag{4.2}$$

と置くと、

$$B = c^{\lambda}\Gamma_{\lambda} \tag{4.3}$$

であるから、

$$\delta B = \delta c^{\lambda}\Gamma_{\lambda} + \Gamma_{\lambda}\delta c^{\lambda} \tag{4.4}$$

である。また、

$$\Gamma_{\lambda} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\partial_{\lambda} g^{\alpha\beta} \tag{4.5}$$

なので、

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{\lambda} &= -\frac{1}{2}\delta g_{\alpha\beta}\partial_{\lambda} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\delta(\partial_{\lambda} g^{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}\partial_{\lambda} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\delta(\partial_{\lambda} g^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\delta(\partial_{\lambda} g^{\mu\nu})\end{aligned} \tag{4.6}$$

である。また、(3.5) より、

$$c^{\lambda} = -\partial_{\alpha} g^{\alpha\lambda} - g^{\lambda\gamma}\Gamma_{\gamma} \tag{4.7}$$

であり、

$$
\begin{aligned}
\delta c^\lambda &= -\delta g^{\lambda\gamma}\Gamma_\gamma - g^{\lambda\gamma}\delta\Gamma_\gamma - \delta(\partial_\alpha g^{\alpha\lambda}) \\
&= -\delta g^{\mu\nu}\frac{1}{2}(\delta^\lambda_\mu\Gamma_\nu + \delta^\lambda_\nu\Gamma_\mu) + g^{\lambda\gamma}\Big(\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\partial_\gamma g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta(\partial_\gamma g^{\mu\nu})\Big) - \delta(\partial_\gamma g^{\mu\nu})\frac{1}{2}(\delta^\gamma_\mu\delta^\lambda_\nu + \delta^\gamma_\nu\delta^\lambda_\mu) \\
&= \delta g^{\mu\nu}\Big[\frac{1}{2}g^{\lambda\gamma}\partial_\gamma g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\delta^\lambda_\mu\Gamma_\nu + \delta^\lambda_\nu\Gamma_\mu)\Big] + \delta(\partial_\gamma g^{\mu\nu})\Big[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\lambda\gamma} - \frac{1}{2}(\delta^\gamma_\mu\delta^\lambda_\nu + \delta^\gamma_\nu\delta^\lambda_\mu)\Big]
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

となる。よって、

$$
\begin{aligned}
\delta B = \delta g^{\mu\nu}\Big[\frac{1}{2}\Gamma_\lambda g^{\lambda\gamma}\partial_\gamma g_{\mu\nu} - \Gamma_\mu\Gamma_\nu - \frac{1}{2}c^\lambda\partial_\lambda g_{\mu\nu}\Big] \\
+\delta(\partial_\lambda g^{\mu\nu})\Big[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}c^\lambda + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\lambda\gamma}\Gamma_\gamma - \frac{1}{2}(\delta^\lambda_\mu\Gamma_\nu + \delta^\lambda_\nu\Gamma_\mu)\Big]
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

となり、

$$
B_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}(\Gamma_\gamma g^{\lambda\gamma} - c^\lambda) - \Gamma_\mu\Gamma_\nu, \tag{4.10}
$$

$$
B^\lambda{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(c^\lambda - g^{\lambda\gamma}\Gamma_\gamma) - \frac{1}{2}(\delta^\lambda_\mu\Gamma_\nu + \delta^\lambda_\nu\Gamma_\mu) \tag{4.11}
$$

を得る。

5　$G_{\mu\nu}$ の計算

よって、

$$
\begin{aligned}
G^\lambda{}_{\mu\nu} &= -A^\lambda{}_{\mu\nu} + B^\lambda{}_{\mu\nu} \\
&= \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(c^\lambda - g^{\lambda\gamma}\Gamma_\gamma) - \frac{1}{2}(\delta^\lambda_\nu\Gamma_\mu + \delta^\lambda_\mu\Gamma_\nu)
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

である。これより、

$$
\begin{aligned}
\partial_\lambda G^\lambda{}_{\mu\nu} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}(-c^\lambda + g^{\lambda\gamma}\Gamma_\gamma) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\Gamma^\lambda{}_{\sigma\rho}\partial_\lambda g^{\sigma\rho} - \partial_\lambda g^{\lambda\gamma}\Gamma_\gamma) \\
-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial_\lambda c^\lambda - g^{\lambda\gamma}\partial_\lambda\Gamma_\gamma) - \frac{1}{2}(\partial_\nu\Gamma_\mu + \partial_\mu\Gamma_\nu)
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

となる。ここで、

$$
\partial_\lambda g^{\sigma\rho} = -(g^{\rho\alpha}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\alpha} + g^{\sigma\alpha}\Gamma^\rho{}_{\lambda\alpha}), \tag{5.3}
$$

$$
\partial_\lambda g^{\lambda\gamma} = -(g^{\gamma\alpha}\Gamma_\alpha + g^{\lambda\alpha}\Gamma^\gamma{}_{\lambda\alpha}) = -(g^{\gamma\alpha}\Gamma_\alpha + c^\gamma) \tag{5.4}
$$

なので、

$$
\Gamma^\lambda{}_{\sigma\rho}\partial_\lambda g^{\sigma\rho} - \partial_\lambda g^{\lambda\gamma}\Gamma_\gamma = -2g^{\rho\alpha}\Gamma^\lambda{}_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\alpha} + g^{\gamma\alpha}\Gamma_\alpha\Gamma_\gamma + \Gamma_\gamma c^\gamma \tag{5.5}
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
\partial_\lambda G^\lambda{}_{\mu\nu} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}(-c^\lambda + g^{\lambda\gamma}\Gamma_\gamma) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(-2g^{\rho\alpha}\Gamma^\lambda{}_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\alpha} + g^{\gamma\alpha}\Gamma_\alpha\Gamma_\gamma + \Gamma_\gamma c^\gamma) \\
-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial_\lambda c^\lambda - g^{\lambda\gamma}\partial_\lambda\Gamma_\gamma) - \frac{1}{2}(\partial_\nu\Gamma_\mu + \partial_\mu\Gamma_\nu)
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

である。また、

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\alpha} G^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \Gamma_{\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(\Gamma_{\lambda} c^{\lambda} - g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha}\Gamma_{\beta}) - \Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} \tag{5.7}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\alpha} G^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \partial_{\lambda} G^{\lambda}{}_{\mu\nu} &= \partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_{\lambda} g_{\mu\nu}(-c^{\lambda} + g^{\lambda\gamma}\Gamma_{\gamma}) \\
&\quad -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(-2 g^{\rho\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\alpha} + 2\Gamma_{\gamma} c^{\gamma}) \\
&\quad -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(\partial_{\lambda} c^{\lambda} - g^{\lambda\gamma}\partial_{\lambda}\Gamma_{\gamma}) - \frac{1}{2}(\partial_{\nu}\Gamma_{\mu} + \partial_{\mu}\Gamma_{\nu}) + \Gamma_{\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} \\
&= \partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_{\lambda} g_{\mu\nu}(-c^{\lambda} + g^{\lambda\gamma}\Gamma_{\gamma}) \\
&\quad -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(R + \Gamma_{\lambda} c^{\lambda} - g^{\rho\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\alpha}) \\
&\quad +\Gamma_{\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} - \frac{1}{2}(\partial_{\nu}\Gamma_{\mu} + \partial_{\mu}\Gamma_{\nu}) \\
&= R_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} + \frac{1}{2}\partial_{\lambda} g_{\mu\nu}(-c^{\lambda} + g^{\lambda\gamma}\Gamma_{\gamma}) \\
&\quad -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(R + \Gamma_{\lambda} c^{\lambda} - g^{\rho\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\alpha}) + \frac{1}{2}(\partial_{\nu}\Gamma_{\mu} - \partial_{\mu}\Gamma_{\nu})
\end{aligned} \tag{5.8}$$

となる。ところで、$\partial_{\nu}\Gamma_{\mu} - \partial_{\mu}\Gamma_{\nu} = 0$ である[3)]。よって、

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\alpha} G^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \partial_{\lambda} G^{\lambda}{}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} + \frac{1}{2}\partial_{\lambda} g_{\mu\nu}(-c^{\lambda} + g^{\lambda\gamma}\Gamma_{\gamma}) \\
&\quad -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(R + \Gamma_{\lambda} c^{\lambda} - g^{\rho\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\alpha})
\end{aligned} \tag{5.9}$$

である。これより、

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\alpha} G^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \partial_{\lambda} G^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \\
&\quad -\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} + \frac{1}{2}\partial_{\lambda} g_{\mu\nu}(-c^{\lambda} + g^{\lambda\gamma}\Gamma_{\gamma})
\end{aligned} \tag{5.10}$$

を得る。よって、(2.10) より、

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= A_{\mu\nu} - B_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\alpha} G^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \partial_{\lambda} G^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G \\
&= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R
\end{aligned} \tag{5.11}$$

となる。

[3)] $\Gamma_{\lambda\mu\nu} := \frac{1}{2}(\partial_{\mu} g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu})$ と置くと、

$$\begin{aligned}
\partial_{\nu}\Gamma_{\mu} &= \partial_{\nu}(g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta\mu}) \\
&= \partial_{\nu} g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta\mu} + g^{\alpha\beta}\partial_{\nu}\Gamma_{\alpha\beta\mu} \\
&= -(g^{\beta\sigma}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma} + g^{\alpha\sigma}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\sigma})\Gamma_{\alpha\beta\mu} + g^{\alpha\beta}\partial_{\nu}\Gamma_{\alpha\beta\mu} \\
&= -2 g_{\alpha\tau} g^{\beta\sigma}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\tau}{}_{\beta\mu} + g^{\alpha\beta}\partial_{\nu}\Gamma_{\alpha\beta\mu}
\end{aligned}$$

なので、

$$\partial_{\nu}\Gamma_{\mu} - \partial_{\mu}\Gamma_{\nu} = g^{\alpha\beta}(\partial_{\nu}\Gamma_{\alpha\beta\mu} - \partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\beta\nu}) = 0$$

となる。

6　スカラーなラグランジアン密度

G において、

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} \to \nabla^{(0)}_\lambda g_{\mu\nu} \tag{6.1}$$

の置き換えをすることを考える。ここで、$\nabla^{(0)}_\lambda$ は共変微分で、その接続は平坦時空を表す計量 $\eta_{\mu\nu}$ に対するリーマン接続である[4)]。上の置き換えで、

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \to C^\lambda{}_{\mu\nu} := \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \tag{6.2}$$

となる。$\gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ は $\eta_{\mu\nu}$ に対するリーマン接続である[5)]。$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ はテンソルではないが、$C^\lambda{}_{\mu\nu}$ はテンソルである。

以下、

$$h := \sqrt{-g}, \tag{6.3}$$
$$\mathcal{A} := g^{\mu\nu} C^\rho{}_{\gamma\nu} C^\gamma{}_{\mu\rho}, \tag{6.4}$$
$$\mathcal{B} := g^{\mu\nu} C^\rho{}_{\gamma\rho} C^\gamma{}_{\mu\nu}, \tag{6.5}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}} := h\mathcal{A}, \tag{6.6}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{B}} := h\mathcal{B} \tag{6.7}$$

と置く。このとき、置き換え (6.1) で、

$$G \to \mathcal{G} := \mathcal{A} - \mathcal{B}, \tag{6.8}$$
$$\boldsymbol{G} \to \boldsymbol{\mathcal{G}} := \boldsymbol{\mathcal{A}} - \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{6.9}$$

である。G はスカラーではないが、$\mathcal{G}$ はスカラーである。

$\boldsymbol{\mathcal{G}}$ の変分からも、$\boldsymbol{G}$ のときの同様に、$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ が導かれることを示す。以下の計算は [2] を参考にした。

まず、

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\mathcal{A}} &= \delta(hg^{\mu\nu}) C^\rho{}_{\gamma\nu} C^\gamma{}_{\mu\rho} + 2hg^{\mu\nu} \delta C^\rho{}_{\gamma\nu} C^\gamma{}_{\mu\rho} \\ &= -\delta(hg^{\mu\nu}) C^\rho{}_{\gamma\nu} C^\gamma{}_{\mu\rho} + 2\delta(hg^{\mu\nu} C^\rho{}_{\gamma\nu}) C^\gamma{}_{\mu\rho} \end{aligned} \tag{6.10}$$

である。ここで、

$$\partial_\lambda g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} \Gamma^\nu{}_{\alpha\lambda} - g^{\nu\alpha} \Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda} \tag{6.11}$$

なので、

$$\delta\boldsymbol{\mathcal{A}} = -\delta(hg^{\mu\nu}) C^\rho{}_{\gamma\nu} C^\gamma{}_{\mu\rho} + [-\delta(\partial_\gamma g^{\mu\rho} h) - 2\delta(hg^{\mu\nu}) \gamma^\rho{}_{\gamma\nu}] C^\gamma{}_{\mu\rho} \tag{6.12}$$

となる。

---

4)(1.2) の $R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}$ を、計量 g に対するという意味で $R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}[g]$ と書くと、$R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}[\eta] = 0$ である。

5)すなわち、$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ を $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}[g]$ と書くと、$\gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}[\eta]$ である。

また、

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\mathcal{B}} &= \delta(hg^{\mu\nu}C_\gamma)C^\gamma{}_{\mu\nu} + hg^{\mu\nu}C_\gamma\delta C^\gamma{}_{\mu\nu} \\ &= \delta(hg^{\mu\nu}C_\gamma)C^\gamma{}_{\mu\nu} + C_\gamma\delta(hg^{\mu\nu}C^\gamma{}_{\mu\nu}) - \delta(hg^{\mu\nu})C_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} \\ &= \delta(g^{\mu\nu}\partial_\gamma h)C^\gamma{}_{\mu\nu} - \delta(hg^{\mu\nu})\gamma_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} + C_\gamma\delta(hg^{\mu\nu}C^\gamma{}_{\mu\nu}) - \delta(hg^{\mu\nu})C_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{6.13}$$

である。ここで、$\bullet_\gamma := \bullet^\rho{}_{\gamma\rho}(\bullet = C, \Gamma, \gamma)$ である。ところで、(6.11) より、

$$\partial_\lambda(hg^{\mu\nu}) = h(-g^{\mu\alpha}\Gamma^\nu{}_{\alpha\lambda} - g^{\nu\alpha}\Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda} + g^{\mu\nu}\Gamma_\lambda) \tag{6.14}$$

である。$\lambda = \nu$ として、

$$\partial_\nu(hg^{\mu\nu}) = -hg^{\nu\alpha}\Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} \tag{6.15}$$

なので、これを (6.13) の第 2 項に代入して、

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\mathcal{B}} = \delta(g^{\mu\nu}\partial_\gamma h)C^\gamma{}_{\mu\nu} - \delta(hg^{\mu\nu})\gamma_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - C_\gamma\delta[\partial_\beta(hg^{\gamma\beta})] \\ -C_\gamma\delta(hg^{\mu\nu})\gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \delta(hg^{\mu\nu})C_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{6.16}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\mathcal{G}} &= \delta(hg^{\mu\nu})C_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - \delta(hg^{\mu\nu})C^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho} \\ &\quad -\delta[\partial_\gamma(g^{\mu\rho}h)]C^\gamma{}_{\mu\rho} + C_\gamma\delta[\partial_\beta(hg^{\gamma\beta})] \\ &\quad +\delta(hg^{\mu\nu})[\gamma_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} + C_\gamma\gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - 2\gamma^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho}]\end{aligned} \tag{6.17}$$

である。第 2 行は、

$$\delta(g^{\mu\nu}h)[\partial_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu C_\mu] + \partial_\rho\boldsymbol{F}^\rho \tag{6.18}$$

の形に書ける。よって、

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\mathcal{G}} &= \delta(g^{\mu\nu}h)\Big([\partial_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu C_\mu + C_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - C^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho}] + [\gamma_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} + C_\gamma\gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - 2\gamma^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho}]\Big) \\ &\quad +\partial_\rho\boldsymbol{F}^\rho \\ &= \delta(g^{\mu\nu}h)\Big([\partial_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu C_\mu + C_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - C^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho}] \\ &\quad +[\gamma_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} + C_\gamma\gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \gamma^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho} - C^\rho{}_{\gamma\nu}\gamma^\gamma{}_{\mu\rho}]\Big) + \partial_\rho\boldsymbol{F}^\rho \\ &=: \delta(g^{\mu\nu}h)\mathcal{R}_{\mu\nu} + \partial_\rho\boldsymbol{F}^\rho\end{aligned} \tag{6.19}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mu\nu} &= [\partial_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu C_\mu + C_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - C^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho}] \\ &\quad +[\gamma_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} + C_\gamma\gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \gamma^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho} - C^\rho{}_{\gamma\nu}\gamma^\gamma{}_{\mu\rho}] \\ &= \partial_\gamma\Gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma_\mu + \Gamma_\gamma\Gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu}\Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} \\ &\quad -(\partial_\gamma\gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu\gamma_\mu + \gamma_\gamma\gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \gamma^\rho{}_{\gamma\nu}\gamma^\gamma{}_{\mu\rho})\end{aligned} \tag{6.20}$$

である。第1行目は $g_{\mu\nu}$ に対するリッチテンソル $R_{\mu\nu}(=: R_{\mu\nu}[g])$ であり、第2行目は $(-1)R_{\mu\nu}[\eta] = 0$ である。また、

$$\delta(g^{\mu\nu}h) = h\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}hg^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{6.21}$$

なので、

$$\delta\boldsymbol{\mathcal{G}} = \delta g^{\mu\nu}\cdot h\Big(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\Big) + \partial_\rho \boldsymbol{F}^\rho \tag{6.22}$$

となる。これは、

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\Big[\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{G}}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{G}}}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})}\Big] = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{6.23}$$

を意味する。

References

[1] C. メラー (著), 永田 恒夫･伊藤 大介 (訳)『相対性理論』(みすず書房, 1959 年)(p.380, p.381).

[2] ディラック (著), 江沢 洋 (訳)『一般相対性理論』(ちくま学芸文庫, 2005 年).