平行移動に関して

中嶋 慧, 松尾 衛

November 3, 2021

Abstract

この記事は、『一般ゲージ理論と共変解析力学』の平行移動の記述の修正を目的とする。また B.10.1 節の後半を補足する。

1 平行移動の定義

3.3 節および 8.5 節の平行移動の解説が適切でないと思われるので修正する。

1.1 テンソルの平行移動

(s,r) 型のテンソル場の成分 $\psi^A \in \mathcal{T}_r^s$ に対して、共変微分は、

$$\nabla_\mu \psi^A \quad := \quad \partial_\mu \psi^A + (\underline{\Gamma}_\mu)^A{}_B \psi^B \tag{1.1}$$

で定義される。これは (3.2.8) である。ここで、$\underline{\Gamma}_\mu$ は、(3.2.24) より、

$$(\underline{\Gamma}_\mu)^A{}_B \quad = \quad \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} (\underline{G}^\nu{}_\lambda)^A{}_B \tag{1.2}$$

である。

今、多様体上のある 1 点 P でのテンソル T^A を平行移動させ、点 Q でのテンソルを定義したい。まず、点 Q が点 P に無限小だけ離れている場合を考える。点 P と点 Q の座標を、それぞれ $x,\, x+\Delta x$ とする。点 P でのテンソルの成分を $T^A(x)$ と書き、これを点 Q まで平行移動したものの成分を $T_\parallel^A(x+\Delta x)$ と書く。$T_\parallel^A(x+\Delta x)$ を、

$$T_\parallel^A(x+\Delta x) \quad := \quad T^A(x) - \Delta x^\mu (\underline{\Gamma}_\mu)^A{}_B(x) T^B(x) \tag{1.3}$$

で定義する。$T^A(x)$ が (s,r) 型のテンソルのとき、

$$\begin{aligned}(T_\parallel)_{\mu_1\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\cdots\nu_s}(x+\Delta x) \quad &= \quad T_{\mu_1\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\cdots\nu_s}(x) + \Delta x^\rho \sum_{i=1}^r \Gamma^\alpha{}_{\mu_i\rho} T_{\mu_1\cdots\mu_{i-1}\alpha\mu_{i+1}\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\cdots\nu_s} \\ &\quad -\Delta x^\rho \sum_{j=1}^s \Gamma^{\nu_j}{}_{\alpha\rho} T_{\mu_1\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\cdots\nu_{j-1}\alpha\nu_{j+1}\cdots\nu_s} \end{aligned} \tag{1.4}$$

となる。もしも $T^A(x)$ が P の近くで場として与えられているときは、

$$T^A(x+\Delta x) - T_\parallel^A(x+\Delta x) \;=\; \Delta x^\mu \nabla_\mu T^A(x) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \tag{1.5}$$

となっている。

点 Q(座標 x_Q) が点 P(座標 x_P) から有限に離れている場合を考える。$C = \{x(t) \in M | 0 \le t \le a\}$ を P と Q とを結ぶ曲線とする ($x(0) = x_P$, $x(a) = x_Q$)。このとき、微分方程式

$$\frac{d\tilde{T}^A(t)}{dt} \;=\; -\frac{dx^\mu(t)}{dt}(\underline{\Gamma}_\mu)^A{}_B(x(t))\tilde{T}^B(t) \tag{1.6}$$

の初期値 $\tilde{T}^A(0) = T^A(x_P)$ での下での解 $\tilde{T}^A(t)$ を考え、

$$T_\parallel^A(x_Q, C) \;:=\; \tilde{T}^A(a) \tag{1.7}$$

とする。経路 C に沿って $T^A(x_P)$ を Q まで平行移動させたものを、この式で定義する。特に、点 Q が点 P に無限小だけ離れている場合は (1.3) に帰着する。

1.2 ゲージ場による平行移動

(8.2.1) の場の組 ψ^A の点 x での値 $\psi^A(x)$ を点 $x+\Delta x$ まで平行移動させたとき、値が $\psi_\parallel^A(x+\Delta x)$ となるとする。Δx は微小である。先ほどと同様に、

$$\psi_\parallel^A(x+\Delta x) \;=\; \psi^A(x) - \Delta x^\mu(\underline{A}_\mu\psi)^A \tag{1.8}$$

とする。これが平行移動の定義である。もしも ψ^A が P の近くで場として与えられているときは、

$$\psi^A(x+\Delta x) - \psi_\parallel^A(x+\Delta x) \;=\; \Delta x^\mu(D_\mu\psi)^A(x) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \tag{1.9}$$

となっている。

2 (B.10.10) 式への補足

(B.10.10) 式とその前後への補足をする。

いま、$\{t^{(\alpha)}{}_\nu(x_0)\}_{\alpha=0,1,\cdots,D-1}$ を 1 形式の成分の、点 x_0 での値の組とする[1)]。これを経路 C に沿って x まで平行移動させたもの $t_\parallel^{(\alpha)}(x, C)$ は一般に経路に依存する。ただし、もしも領域 Ω で曲率が 0 であると、(x_0 も x も C も Ω に含まれるとして) これは経路 C には依存しないので、これを $t^{(\alpha)}{}_\nu(x)$ と書く。これは、

$$\nabla_\mu t^{(\alpha)}{}_\nu(x) \;=\; 0 \tag{2.1}$$

を満たす。この式が本書の (B.10.10) 式である。上式は、

$$\partial_\mu t^{(\alpha)}{}_\nu(x) \;=\; t^{(\alpha)}{}_\lambda(x)\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}(x) \tag{2.2}$$

1) ν はテンソル添え字で、α はラベルである。

となる。さらに、もしも捩率も領域 Ω で 0 のとき、上式より、

$$\partial_\mu t^{(\alpha)}_{\ \nu}(x) - \partial_\nu t^{(\alpha)}_{\ \mu}(x) \ = \ 0 \tag{2.3}$$

である。1 形式 $t^{(\alpha)} = t^{(\alpha)}_{\ \nu} dx^\nu$ を考えると、上式は $dt^{(\alpha)} = 0$ を意味する。ポアンカレの補題 (3.7.7 節) より、$t^{(\alpha)} = dX^\alpha$ を満たす量 X^α が存在する。$x'^\alpha = X^\alpha$ とすると、これは (B.10.4) を満たす。